THE VOLATILITY OF THE FINANCIAL MARKET – A QUANTITATIVE APPROACH

Meşter Ioana Teodora

University of Oradea, Faculty of Economics, imester@uoradea.ro

Abstract: During the last years, the financial markets have been subject to significant fluctuations of their financial actives. These spectacular movements have revived the interest, in the academic circles and policy makers and regulation and control authorities as well, for the financial market volatility. The analysis of these phenomena is justified by the fact that the stock exchange chocks have significant effects on the financial stability and they can lead to serious consequences in the real economy.

Key words : financial markets, volatility, efficient markets

1. La mesure de la volatilité

Les fluctuations de cours sont cependant inhérentes à l'existence même des marchés, tout intervenant s'exposant à un risque de perte qu'il doit assumer. La question, sur laquelle la littérature économique et financière se penche depuis environ un siècle, est alors de savoir s'il est possible d'estimer ce risque, tant d'un point de vue théorique qu'empirique. Dans cette optique, de nombreux travaux ont assimilé la notion de risque à celle de la volatilité des rendements des actifs. Dans cette partie, nous allons présenter quelques méthodes pour mesurer la volatilité. Elles sont groupées selon leurs caractéristiques : mesurer la volatilité en utilisant les formules statistiques ou en utilisant les modèles.

1.1. Les mesures statistiques

Sur le marché financier, la volatilité est mesurée comme l'écart type de la rentabilité. L'estimation de l'écart type des rentabilités journalières servent comme une méthode utile pour caractériser l'évolution de la volatilité. Cette statistique mesure la dispersion de la rentabilité :

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{1}^{T}\left(R_t - \overline{R}\right)^2}}{T-1} \qquad (1)$$

Dans cette formule, $\bar{R}$ est la rentabilité moyenne de l'échantillon, $\bar{R} = \sum R_t / T$. L'écart type est une mesure simple mais utile de la volatilité parce qu'il résume la probabilité de recevoir les valeurs extrêmes de rentabilité. Quand l'écart type est grand, la chance d'avoir une rentabilité élevée positive ou négative est grande. Plusieurs études ont utilisé la modification de l'écart type pour mesurer la volatilité. Hooper et Kohlhagen[1], Cushman[2], ont utilisé l'écart type de taux de change comme a procuration pour la volatilité du taux de change. La mesure de la volatilité qui concentre sur l'aspect incertitude de la volatilité est la *Root Mean Square Percentage Error* (RMSPE). C'est une mesure simple et bonne de la prédiction des erreurs, et peut être représentée par la formule suivante :

$$RMSPE = 100\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{E_t - E_t^a}{E_t}\right)^2} \qquad (2)$$

[1] Hooper, P., Kohlhagen, S. W., *The Effect of Exchange Rate Uncertainty on the Prices and Volume of International Trade*, Journal of International Economics, 8(4), 1978, p. 483–512

[2] Cushman, D. O., *The Effects of Real Exchange Rate Risk on International Trade*, Journal of International Economics, 15(1/2), 1983, p. 45–64

Avec E_t représente la variable actuelle de la date t, et E_t^a est la valeur prévisible de cette variable. Comment peut-on générer E_t^a ? Une méthode très simple de générer E_t^a pour la période t est d'utiliser la valeur E_{t-1}. En remplaçant E_t^a par E_{t-1}dans l'équation (2), on a :

$$RMSPE = 100\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{E_t - E_{t-1}}{E_t}\right)^2} \tag{3}$$

On peut aussi prendre l'écart type comme l'estimateur de E_t^a, en indiquant la moyenne comme $\bar{E}$ et le substitue dans l'équation (2), on a :

$$SD = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(E_t - E\right)^2} \tag{4}$$

La méthode d'écart type est « scale dependent ». La meilleure méthode qui n'est pas « scale dependent » est le pourcentage de la variation :

$$CV = 100\frac{1}{E}\sqrt{\frac{1}{T-1}}\sum\left(E_t - E\right)^2 \tag{5}$$

Ces modèles de l'incertain peuvent être estimés en supposant que σ_t est petite pendant les périodes de temps. Pour ces modèles, on suppose que l'écart type en t ne dépende pas des écarts types passés en t-1, t-2…

1.2. Les modèles

Les formules statistiques ne sont efficaces à mesurer la volatilité que dans les cas où la valeur de l'écart type en t ne dépend pas de celle dans le passé. Pour ces cas, les mesures en utilisant des modèles sont plus efficaces. D'après Engle[3], la volatilité sur le marché financier est prévisible. Cette affirmation n'est justifiée que dans les cas l'effet ARCH existe. Dans les modèles, les statistiques des séries temporelles sont prises pour trouver la meilleure valeur anticipée de la volatilité. Et en utilisant les statistiques des séries temporelles, il est possible de déterminer si l'information récente est plus importante que celle dans le passé.

Modèle ARCH

Le modèle ARCH introduit par Engle est le développement le plus important. Ce modèle est bien appliqué depuis sa naissance : les modèles CAPM (Capital Asset Pricing Model) et APT (Arbitrage Pricing Model). Engle trouvait en analysant les résultats de modèle d'inflation que les petites et les grandes erreurs anticipées ont l'air d'apparaître en group. Ca suggère une forme d'hétéroscédasticité dans laquelle la variance des erreurs anticipées dépende de la taille des perturbations précédentes. Dans le modèle ARCH, la moyenne et la variance conditionnelle sont utilisées. La moyenne conditionnelle représente la valeur espérée d'une variable en t en conditionnelle des informations disponibles en t-1. C'est à dire l'information précédente est utilisée :

$$m_t = E[y_t|F_{t-1}] = E_{t-1}[y_t] \tag{6}$$

avec y_t est la rentabilité de la période t-1 à t, F_{t-1} est l'information disponible en t-1, E est l'espérance mathématique. Quand les investisseurs connaissent les informations en t-1, les décisions d'investissement, la rentabilité espérée des investisseurs, la volatilité pour les investisseurs dépendent de la valeur espérée conditionnelle de y_t. Ces valeurs sont calculées en utilisant la formule de la moyenne conditionnelle auparavant et la formule de la variance conditionnelle suivante :

$$\sigma_t^2 = E_{t-1}\left(y_t - m_t\right)^2 \tag{7}$$

La volatilité mesure la variabilité des rentabilités, les investisseurs vont estimer plus exactement en utilisant la variance conditionnelle σ_t^2, parce qu'il dépend des informations en t-1.

Pour analyser la rentabilité y_t qu'on peut recevoir en t, il faut suivre 3 étapes :

- Etape 1 : Préciser m_t

[3] Engle, R. *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation*, Econometrica, 50, 1982, p. 987–1008

- Etape 2 : Préciser σ_t^2
- Etape 3 : Préciser la fonction de densité des résidus.

Sur le marché financier, m_t est normalement désigné comme la prime de risque ou la rentabilité espérée qui est nulle, au moins pour les données de fréquence élevée. Pour la fonction de la densité des résidus, les caractéristiques des rentabilités qui ne suivent pas une distribution normale seront examinées sur plusieurs points particuliers quand on étudie les applications du modèle ARCH. D'après Engle et Gonzalez-Rivera[4], l'hypothèse que la densité conditionnelle est une distribution normale ne fait pas des affects sensibilités même si elle est fausse. Donc, dans les modèles de cette partie, l'étape 2 est au centre des études. En particulière, on examine comment la variance conditionnelle dépend de l'information passée. La formule de la variance conditionnelle ci dessus est aussi utilisée pour déterminer la prime de risque et la volatilité anticipée.

Modèle ARCH linéaires

ARCH peuvent être définies en terme de distribution des erreurs d'un modèle linéaire dynamique. Supposons qu'on a besoin d'estimer y_t, la rentabilité, par le modèle linéaire suivant :

$$y_t = x_t'\beta + \varepsilon_t \qquad t=1, .. T \tag{8}$$

où x_t est un vecteur (k, 1) des variables exogènes, inclus les valeurs décalages de variable dépendante, et ε_t est un vecteur (k, 1). Le modèle ARCH caractérise la distribution de l'erreur stochastique ε_t conditionnelle en les valeurs réalisées des variables : $\{y_{t-1}, x_{t-1}, y_{t-2}, x_{t-2} \ldots\}$. L'idée d'Engle (1992) mettait la variance conditionnelle de la série des erreurs comme une fonction des erreurs retardées, de temps, des paramètres, et variables prévisibles :

$$\sigma_t^2 = \sigma^2(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3} \ldots., t, \beta, b) \tag{10}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t^2 Z_t$$

où $Z_t \sim$ i.i.d avec $E(Z_t) = 0$, $E(Z_t^2) = 1$. Par définition, ε_t est en série non corrélé avec une moyenne nulle, mais la variance conditionnelle de ε_t égal à σ_t^2 qui peut être changé dans le temps. Engle a choisit une forme de fonction pour σ_t^2 :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 \tag{11}$$

où ω et $\{\alpha_i\}$, i=1, p sont les constantes non négatives. Cette condition est nécessaire pour que σ_t^2 soit non négative. Les caractéristiques distinguées de ce modèle n'est pas seulement que la variance conditionnelle est une fonction de la séries conditionnelle $\sigma^2(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3} \ldots., t, \beta, b)$ mais aussi c'est la forme particulière qu'elle est spécifiée. Les épisodes de la volatilité sont généralement caractérisés comme les chocs pour la variable dépendante. Dans le modèle de régression, un choc grave est présenté par un grand écart type de y_t dont la moyenne conditionnelle est m_t, ou présenté par une grande valeur positive ou négative de ε_t. Dans le modèle ARCH, la variance de l'erreur courante, conditionnelle sur l'erreur réalisée ε_{t-1}, est une fonction croissante de l'ampleur des erreurs retardées sans tenir compte leur signe. p détermine la durée de temps avec laquelle les chocs persistent à faire conditionner la variance des erreurs. L'effet du choc de la rentabilité i périodes précédentes (i<p) sur la volatilité courante est déterminé par le paramètre α. Les investisseurs choisissent la valeur de p selon leur estimation de temps la volatilité est changée.

Dans la formule précédente, il y a une corrélation positive entre la série de la variance conditionnelle et la série des erreurs : une valeur élevée de ε_t^2 fait augmenter σ_{t+1}^2 et cette variance augmente la valeur de ε_{t+1}^2. C'est à dire une valeur élevée (petite) de ε_t^2 donne une valeur élevé (petite) de ε_{t+1}^2. L'avantage de ce méthode est que les paramètres peuvent être estimés à partir des données historiques et ils sont pris pour anticiper la volatilité. La formule précédente de la variance conditionnelle peut s'écrire comme :

[4] Engle, R. F., Gonzalez-Rivera, G., *Semiparametric ARCH Models*, Journal of Business and Economic Statistics 9, 1991, p. 345-359

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + [\, \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 \,] \tag{12}$$

Le terme entre la parenthèse n'est pas prévisible.

Le modèle GARCH

Bolleverslev[5] a développé le modèle ARCH à GARCH, c'est à dire ARCH généralisées. Ce modèle permet d'introduire les variances conditionnelles passées dans la formule pour calculer la variance conditionnelle présente. Un modèle GARCH (p,q) est présenté comme la formule suivante:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \tag{13}$$

σ_t^2 est une fonction des valeurs retardée de ε_{t-1}^2 et ω, {α_i}, i=1,p, et {β_i}, q sont les constantes non négatives. Dans la formule précédente, le modèle GARCH explique la variance par deux séries retardées : une sur les carrés des résidus passées pour capturer les effets fréquents, l'autre sur les variances conditionnelles passées qui représente les influences de long term.

L'équation (13) peut s'écrire sous forme :

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \beta_i)\ \varepsilon_{t-1}^2 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i [\, \varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-i}^2 \,] + [\, \varepsilon_t^2 - \sigma_{t-i}^2 \,] \tag{14}$$

Pour simplifier la formule, le modèle GARCH (1,1) est souvent utilisé dans les applications et ce modèle le plus simple peut se représenter par :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-i}^2 = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \varepsilon_{t-i-1}^2 \tag{15}$$

Le modèle GARCH (1,1) dans l'équation (15) présente une combinaison dans la formule de calculer la variance conditionnelle en t. La variance espérée pour la date t est une combinaison d'une tendance, la variance de la période précédente et pris en compte le choc de la période précédente. Et dans cette formule, l'effet d'un choc de la rentabilité diminue géométriquement.

Modèle EGARCH

Dans le cas du modèle GARCH, les résidus sont au carré avant les estimer. Mais, il est possible que les mouvements en baisse et les mouvements en hausse donnent des effets différents sur la prédiction de la volatilité. Nelson[6] est le premier enquêteur du modèle de l'effet levier (c'est à dire les mouvements en baisse ont plus d'influences que les mouvements en hausse), en introduisant le modèle EGARCH (exponentiel de modèle ARCH). Ce modèle est représenté comme suite :

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \log \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| / \sigma_{t-i}^2)^{1/2} + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i (\varepsilon_{t-1} / \sigma_{t-i}^2)^{1/2} \tag{16}$$

En utilisant le modèle EGARCH, Black[7] trouve que la volatilité sur le marché boursier a tendance à augmenter après les rentabilités négatives et a tendance à baisser après les rentabilités positives. Le modèle EGARCH exploite cette régularité empirique en mettant la variance conditionnelle en fonction de la taille et le signe des résidus retardés. Etant différent par rapport au modèle GARCH(p,q), le modèle EGARCH ne fait aucune hypothèse sur les paramètres α et β pour assurer la non négativité de la variance conditionnelle. L'équation (13) accepte les valeurs positives et négatives de ε_t pour avoir des impacts différents sur la volatilité. Le coefficient γ_I est typiquement négatif, donc un choc positif des rentabilités entraîne une volatilité moins élevée qu'un choc négatif. Le modèle EGARCH donne des différences par rapport au modèle GARCH :

---

[5] Bollerslev, T., *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*, Journal of Econometrics, 31, 1986, p. 307-327

[6] Nelson, Daniel B., *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach*, Econometrica 59, 1991, p. 347-370

[7] Black, F., *The pricing of commodity contracts*, Journal of Financial Economics 3(1), 1976, p. 167-179

- Premièrement, les bonnes et les mauvaises nouvelles ont des impacts différents sur la volatilité dans le modèle EGARCH mais elles ont des mêmes impacts dans le modèle GARCH.
- Deuxièmement, les nouvelles importantes ont des impacts plus importants dans le modèle EGARCH que dans le modèle GARCH standard.

Modèle de Taylor – Schwert

Schwert[8] a développé l'idée de Davidian à supposer que l'estimer σ_t^2 avec la valeur absolue au carré des résidus retardés peuvent être plus robuste avec une distribution petite. Taylor[9] a proposé une méthode similaire. En générale, depuis les résidus standards de petite taille sont pris dans les applications empiriques du modèle ARCH, l'utilisation de la valeur absolu des résidus est raisonnable.

Le modèle de Schwert estime les rentabilités mensuelles à partir des sonnées mensuelles. La mesure est plus robuste que celle de l'écart type grâce à leur sensibilité pour les valeurs extrêmes, la mesure était basée sur la déviation absolue de rentabilité par rapport à leur moyenne conditionnelle. Cette méthode d'estimation de la volatilité utilise les 12 variables muettes mensuelles et 12 valeurs retardées de la volatilité.

$$\sigma_t^x = \beta_l(H)\ \sigma_t^x + \sum_{m=1}^{12} \beta_m SD_{m,t} + \varepsilon_{2,t}^x \tag{17}$$

où $\beta_l(H)$ est un polynôme avec 12 nombre de retard, $SD_{m,t}$ sont des variables muettes mensuelles pour capturer la variation saisonnière de la moyenne et la variance conditionnelle, σ_t^x sont les innovations qu'on obtient comme la valeur absolue de résidu d'après l'équation :

$$\sigma_t^x = |\varepsilon_{1,t}^x \text{ où}$$

$$\varepsilon_{1,t}^x = \Delta\log(X)_t - E_t(\log(X)_t / I_{t-1}) = \Delta\log(X)_t - \alpha_l(H)\Delta\log(X)_t - \sum_{m=1}^{12} \alpha_m SD_{m,t} \tag{18}$$

et $\alpha_l(H)$ est un autre polynôme de 12 nombre de retard. La mesure de volatilité conditionnelle dans l'équation (17) représente une généralisation de l'estimateur standard pour mesurer la volatilité du marché financier parce qu'il permet la moyenne conditionnelle de varier dans le temps d'après l'équation (18) et aussi permet d'appliquer les poids différents dans les calculs les changements imprévisibles de rentabilité dans l'équation (17). Cette mesure est utilisé par Schwert pour tester la relation entre la volatilité de marché financier et celle des économies sous jacents (l'inflation, …).

Modèle de Black – Scholes

Les recherches théoriques et empiriques sur les prix de marché boursier depuis 1950 sont sous les hypothèses de l'efficients de marché du modèle de marche au hasard. Dans un marché efficient, le mouvement de prix d'actifs peut se représenter sous la forme :

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \mu_t + \varepsilon_t \text{ ; avec } E(\varepsilon_t) = 0 \text{ et } Var(\varepsilon_t) = \sigma_t^x \tag{19}$$

La rentabilité en t, r_t, est le pourcentage de changement de prix f'actif S de me période t par rapport à la période t-1. Ce pourcentage est égal à μ_t, la moyenne conditionnelle aléatoire de la période t, plus un terme de moyenne nulle ε_t, qui est indépendante par rapport aux ε dans le passée et dans le future. Il n'existe pas une corrélation entre les ε d'après l'hypothèse de marché efficient ; les changements des prix dans le passé ne donnent aucune information pour ceux au présente. Si S suit une marche au hasard, alors l'espérance mathématique de la rentabilité est nulle et sa variance est constante dans le temps. Par conséquent, μ_t peut être nul et la variance de ε_t est constante dans le temps. En dérivant la formule de prix d'actif, il faut que les prix changent pendant une très petite période de temps. La formulation qu'ils adoptent est une extension du modèle de marche au hasard dans le cas de temps continu.

$$dS/S = \mu dt + \sigma dz$$

[8] Schwert, G. W., *Stock market volatility*, Financial analysts journal, May-June 1990, p. 23-34

[9] Taylor, S., *Modeling Financial Time Series*, Wiley and Sons, New York, NY, 1986

où dS est le changement de prix d'actif en une intervalle infinitésimale de temps dt, μ est ma rentabilité moyenne, dz est la perturbation aléatoire avec la moyenne nulle et σ est la volatilité (l'écart type de taux annuel). D'après ce modèle, la rentabilité suit une distribution normale et le prix d'actif suit une distribution log normal. C'est à dire la rentabilité cumulée pendant une période T a une espérance = μT, variance σ_t^2 T et l'écart type = $\sigma\sqrt{T}$. La caractéristique très intéressante de ce modèle de prix d'actif est qu'avec un niveau de volatilité constante, l'écart type, σ, de la rentabilité totale durant une période augmente avec la racine de cette durée de temps.

2. Conclusion

Depuis le rejet de l'hypothèse de l'efficient de marché, la volatilité existe. Sur le marché financier, la volatilité est connue comme les variations des prix d'actifs et des rentabilités. Avec l'existence de la volatilité, plusieurs chercheurs essayent d'étudier la raison de la volatilité du marché. La raison de volatilité n'est pas seulement les informations existantes sur le marché mais aussi les comportements des investisseurs, les bulles spéculatives et plusieurs autres facteurs. Avec ses influences, la volatilité fait stabiliser les marchés financiers et fait stabiliser aussi l'économie mondiale. L'influence de volatilité peut être diminuée si on la connaît bien et si on peut l'anticiper. Avec les recherches sur la volatilité, on connaît bien les raisons et les conséquences de la volatilité, les solutions et les formules sont aussi nées en espérant qu'on peut anticiper bien la volatilité et limiter les conséquences de volatilité sur l'économie. Ayant de bonnes connaissances et des utiles, normalement, on doit bien contrôler la volatilité mais jusqu'à maintenant, ce qu'on peut faire est seulement de calculer la volatilité dans le passé et analyser ses conséquences qui sont réalisées. Notre but de l'anticiper et limiter les conséquences n'est pas faits. Bien que les méthodes soient bonnes et les critiques sont exacts, la volatilité suit une marche aléatoire donc, il est très difficile de la suivre. Dans l'avenir, c'est sur que les autres recherches seront faits et on espère qu'elles nous aident à résoudre les raisons d'existence de la volatilité et la contrôler.

Références

1. Black, F., *The pricing of commodity contracts*, Journal of Financial Economics 3(1), 1976, p. 167-179
2. Bollerslev, T., *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*, Journal of Econometrics 31, 1986, p. 307-327
3. Cushman, D. O., *The Effects of Real Exchange Rate Risk on International Trade*, Journal of International Economics, 15(1/2), 1983, p. 45–64
4. Engle, R. *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation*, Econometrica, 50, 1982, p. 987–1008
5. Engle, R. F., Gonzalez-Rivera, G., *Semiparametric ARCH Models*, Journal of Business and Economic Statistics 9, 1991, p. 345-359
6. Hooper, P., Kohlhagen, S. W., *The Effect of Exchange Rate Uncertainty on the Prices and Volume of International Trade*, Journal of International Economics, 8(4), 1978, p. 483–512
7. Nelson, Daniel B., *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach*, Econometrica 59, 1991, p. 347-370
8. Schwert, G. W., *Stock market volatility*, Financial analysts journal, May-June 1990, p. 23-34
9. Taylor, S., *Modeling Financial Time Series*, Wiley and Sons, New York, NY, 1986