COMPETITIVITATEA VĂZUTĂ PRIN PRISMA TEORIEI MULȚIMILOR VAGI

LECT.UNIV.DR. FLORIN IONIȚĂ
Colaborator ASE Bucureşti, Bucureşti, str. Aleea Botorani 15 bl.V49 sc.1 et.2 ap.8 sect.5
Tel. 0744655556, email: ionitaf@hotmail.com

THE COMPETITIVENESS DESCRIBED BY THE MEANS OF THE FUZZY SETS THEORY

The purpose of the work is to establish a connection between the general theory of competitiveness and the mathematical theory of Fuzzy Sets, founded in the 60's by Zadeh, in order to facilitate description of competitiveness phenomenon by a mathematical model. It is an approach which does not try to find an universal way or language to solve all specific problems of the domain, but to set up the basis for a new method of studying economical competition and analise its most important characteristics.

Modelarea matematică a **competitivității**, ca proprietate a unor **produse** sau **servicii** care **concurează pe o piață**, este o preocupare permanentă şi extrem de importantă a specialiştilor, având în vedere că un **model** suficient de **fidel** al unui **fenomen economic** permite **exercitarea** cu acuratețe satisfăcătoare a **atributului de previziune** în ceea ce priveşte **evoluția viitoare** a **fenomenului** respectiv şi **reacția** acestuia la diferite **perturbații** ce pot apărea. **Controlabilitatea unui sistem** depinde puternic de **nivelul informației** din şi despre acesta. Considerăm aşadar că indiferent de **modalitatea** aleasă pentru **creşterea competitivității produselor şi serviciilor** unei ramuri industriale sau clase de producători, în particular a **industriei construcțiilor de maşini din România**, **modelarea** cât mai corectă a acestei proprietăți permite o **evaluare realistă a efectelor** ce urmează să se înregistreze odată cu **aplicarea măsurilor propuse**.

Pornim de la premisa că pe o **piață** oarecare **evoluează un număr de producători**, din diverse domenii, ale căror **produse** sunt mai **mult sau mai puțin preferate de către clienți**. Vom restrânge domeniul de studiu doar la piața unui anumit **tip de produse**, în cazul nostrum cele ale **industriei constructoare de maşini**. Dacă notăm cu **A mulțimea tuturor acestor produse**, putem considera că cele **competitive** vor fi grupate generic într-o **mulțime B**. Între cele două mulțimi, există, evident, relația:

$$B \subset A \qquad (1)$$

Din cele arătate în paragrafele precedente rezultă însă că nu se poate spune despre un produs că este sau nu competitiv, acesta putând avea proprietatea de “competitivitate” la un nivel mai ridicat sau mai redus, fiind nu “competitiv” sau “necompetitiv” ci “mai competitiv” sau “mai puțin competitiv”. Această nuanțare se impune cu atât mai mult cu cât competitivitatea depinde, cum am arătat în paragrafele anterioare, de o serie de factori atât interni cât şi externi produselor sau serviciilor, ale căror valori se modifică în timp.

În multe alte situații din viața reală **entitățile** de un anumit tip **nu pot fi încadrate**, față de o **proprietate** oarecare, în una din categoriile **"posedă"** sau **"nu posedă" proprietatea** respectivă, ci doar se poate spune că acestea **au proprietatea respectivă mai mult sau mai puțin**. Această realitate a dus la apariția, în anul 1965, a unei **teorii matematice** denumită **Teoria Mulțimilor Vagi (Fuzzy Sets Theory)** al cărei părinte a fost matematicianul american de origine poloneză **L.A. Zadeh**.

În **teoria clasică** a **mulțimilor** se consideră dată o **mulțime nevidă U** numită *univers* sau *referențial* şi, de asemenea, mulțimea tuturor părților sale, **P(U),** numită ***părțile universului.***
O mulțime A, $A \subset P(U)$, numită **submulțime** sau **parte a referențialului U**, $A \subset U$ **,** este bine şi unic determinată de *funcția* sa *caracteristică* f_A.
***Funcția caracteristică a unei mulțimi* A** este definită pe întreg universul U şi are în cazul mulțimilor clasice doar două valori caracteristice: 0 sau 1.

$$f_A:U\text{->}\{0,1\};\quad f_A(x)=\begin{cases}0 \text{ dacă } x\in A\\ 1 \text{ dacă } x\notin A\end{cases} \tag{2}$$

Caracteristica **1** simbolizează faptul că **elementul x face parte din submulțimea A** iar caracteristica **0** simbolizează **neapartenența elementului x al universului la submulțimea A**. În încercarea de a **reprezenta mai bine realitatea**, **logica modernă** are în vedere şi **nuanțe** între **adevărat (1) şi fals (0)** acceptând **logica clasică** drept un **caz particular**. O propoziție va avea drept valoare de adevăr posibilă atât una din valorile extreme 1 şi 0 (adevărat şi fals) cât şi unele valori intermediare.

În contextul lucrării, dacă considerăm U ca fiind **mulțimea produselor dintr-o anumită clasă**, vândute pe o **piață**, (de exemplu **autoturisme, sau utilaje pentru extracția petrolului**) iar A mulțimea formată din **acele produse considerate a fi competitive**, funcția caracteristică, $\mathbf{f_A}$, aplicată unui **produs x** ar lua **fie valoarea 0** dacă acel produs **nu ar fi competitiv**, fie **1, în caz contrar**. Dacă însă am folosi **principiile logicii moderne**, $\mathbf{f_A(x)}$ ar putea lua **orice valoare între 0 şi 1**, în funcție de **nivelul de competitivitate** atins de **produsul x** pe ansamblul U al **tuturor produselor din aceiaşi clasă**, pe piața respectivă.

O **generalizare** a noțiunii de mulțime clasică este ***mulțimea fuzzy*** (**mulțimea vagă**) care poate fi introdusă prin considerarea unei **extensii a codomeniului funcției caracteristice definită prin relația (1.4) de la două valori {0,1} la întreg intervalul de numere reale [0,1].** Această generalizare este datorată lui ***L.A. Zadeh*** care defineşte noțiunea de *mulțime fuzzy* (fuzzy set) numită ulterior şi *mulțime vagă* (ensemble flou).

Fie mulțimea părților fuzzy F(U). O *mulțime fuzzy* $A\subset F(U)$ are funcția caracteristică μ_A:

$$\mu_A:U\rightarrow[0,1] \tag{3}$$

Pentru fiecare element x din univers, $x \in U$, valoarea funcției caracteristice $\mu_A(X)$ reprezintă gradul (măsura) de apartenență a elementului x la mulțimea fuzzy A. Mulțimea (clasică) $M \in [0,1]$, codomeniul funcției caracteristice a unei mulțimi fuzzy A, se numeşte *mulțimea gradelor de apartenență* ale mulțimii fuzzy A. Astfel, mulțimile clasice sunt de fapt cazuri particulare de mulțimi fuzzy pentru care mulțimea gradelor de apartenență conține doar cele două valori extreme 0 şi 1.

O *mulțime fuzzy* este bine definită de totalitatea cuplurilor de forma:

$$A = \{(x| \mu_A (x))\}_{x \in U} \quad (4)$$

Exemplul 1: Fie referențialul finit cu cinci elemente $U=\{x_1, x_3. x_3, x_4, x_5,x_6\}$ şi mulțimile fuzzy A şi B (Tabelul nr.1):

A	X_1	0	X_2	1	X_3	1	X_4	0	X_5	1	X_6	1
B	X_1	0,8	X_2	0	X_3	0,3	X_4	1	X_5	0,7	X_6	0,5

Tabelul nr. 1

Deoarece gradele de apartenență pentru mulțimea fuzzy A sunt doar 0 şi 1 ea este de fapt mulțimea clasică (pură) $A=\{x_2, x_3, x_5, x_6\}$. Elementele x_1 şi x_4 au gradul de apartenență 0 şi prin urmare ele nu aparțin mulțimii clasice A, deci $x_1, x_4 \notin A$. Gradul de apartenență al elementului x_1 la mulțimea fuzzy B este $\mu_B(X_1)=0,8$. Acest lucru semnifică faptul că x_1 aparține lui B într-o măsură mare. Deasemenea, elementul x_5 aparține lui B într-o măsură mare (0,7) iar elementul x_4 aparține în totalitate (cert) mulțimii fuzzy B. În sfârşit, gradul de apartenență al elementului x_2 la B este nul, ceea ce semnifică faptul că acest element nu aparține (cert) mulțimii fuzzy B.

Particularizând la **competitivitatea pe o piață** oarecare a unor **produse ale industriei constructoare de maşini**, putem considera cele şase elemente ale referențialului U şase **tipuri de autoturisme** care se găsesc în **vânzare** pe o **piață** (de exemplu, pe piața statului Y). A, mulțimea autoturismelor care se vând, este compusă din tipurile x_2, x_3,x_5,x_6 , în timp ce x_1, x_4 nu au avut vânzare. Pentru a vorbi însă de **competitivitate**, este necesar să **comensurăm gradul de preferință** a **consumatorilor** pentru fiecare din cele şase tipuri. Putem face acest lucru, de exemplu, **atașând fiecăreia din tipurile de autoturisme** o valoare numerică subunitară, obținută ca **raport între calitatea şi prețul** acestora.

Acum este evident că şi întreg *universul* (referențialul) U precum şi *mulțimea vidă* clasică pot fi considerate mulțimi fuzzy bine definite de următoarele funcții caracteristice:

$$\mu_U(x) = 1, \ (\forall) \ x \in U \quad (5)$$
$$\mu_\Phi(x) = 0, \ (\forall) \ x \in U \quad (6)$$

În timp ce **produsul** cu funcția caracteristică 0 poate fi considerat cel din care, într-un **interval lung de timp**, **nu s-a vândut nici o unitate**, cel având **funcția caracteristică 1** poate fi un produs **unic pe o piață (monopol).**

Majoritatea **noțiunilor** şi **proprietăților operațiilor cu mulțimi clasice** se conservă şi în **teoria mulțimilor fuzzy**.

Astfel, putem defini în mod similar teoriei mulțimilor clasice **cele cinci relații** şi **operații cu mulțimi fuzzy**, precum şi alte extensii ale operațiilor cu mulțimi. Pentru aceasta considerăm două mulțimi fuzzy oarecare $A,B \in F(U)$. Relațiile şi noile mulțimi fuzzy rezultate în urma operațiilor vor fi definite prin condiții şi/sau definiții ale funcțiilor caracteristice aferente.

A=B ***relația de egalitate.*** Spunem că mulțimile (fuzzy) A şi B sunt egale dacă şi numai dacă are loc condiția:

$$\mu_A(X) = \mu_B(X) \quad , (\forall)\, x \in U \qquad (7)$$

Altfel spus, **proprietatea „a"** a unor produse (să zicem, **competitivitatea** exprimată prin **raportul calitate/preț**) este **echivalentă** cu **proprietatea „b"** (**gradul de preferință al clienților**) dacă pentru orice **produs** disponibil pe **piață** apartenența acestuia la fiecare dintre cele două proprietăți este aceiaşi.

A⊆B ***relația de incluziune.*** Vom spune că mulțimea (fuzzy) A este inclusă în mulțimea B dacă şi numai dacă este îndeplinită condiția:

$$\mu_A(X) \le \mu_B(X), \quad (\forall)\, x \in U \qquad (8)$$

Proprietatea A este mai restrictivă decât B dacă **orice produs are proprietatea A mai puțin decât proprietatea B**. Cele două proprietăți pot coincide.

A⊂B ***relația de incluziune strictă***. Mulțimea A este *inclusă strict* în mulțimea B dacă este **inclusă** în B dar **diferită** de aceasta, deci în plus, este îndeplinită pe lângă relația (1.10) şi următoarea condiție:

$$(\exists) x' \in U \quad \text{a.î.} \quad \mu_A(x') \ne \mu_B(x') \qquad (9)$$

AUB ***reuniunea*** mulțimilor A şi B este o nouă **mulțime fuzzy** bine definită de una din următoarele trei funcții caracteristice:

$$\mu_{AUB}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \qquad (\forall)\, x \in U \qquad (10)$$

sau $$\mu_{AUB}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \qquad (\forall)\, x \in U \qquad (11)$$

sau $$\mu_{AUB}(x) = \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1), \qquad (\forall)\, x \in U \qquad (12)$$

În cazul mulțimilor fuzzy aceste trei relații reprezintă trei moduri diferite de introducere a reuniunii.

A∩B ***intersecția*** mulțimilor A şi B este o nouă mulțime fuzzy bine definită de una din următoarele trei funcții caracteristice:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \qquad (\forall)\, x \in U \qquad (13)$$

sau $$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \qquad (\forall)\, x \in U \qquad (14)$$

sau $$\mu_{A\cap B}(x) = \max\ \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0), \qquad (\forall)\, x \in U \qquad (15)$$

cA ***mulțimea complementară*** a mulțimii fuzzy A este bine definită de relația:

$$\mu_{cA}(x) = 1 - \mu_A(x), \qquad (\forall)\, x \in U \qquad (16)$$

A.B ***produsul algebric*** al mulțimlor A şi B este o nouă mulțime fiizzy definită de următoarea funcție caracteristică:

$$\mu_{A.B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x),\quad (\forall)\, x\in \qquad (17)$$

A⊕B ***suma algebrică*** a mulțimilor A și B este o nouă mulțime fuzzy definită de următoarea funcție caracteristică:

$$\mu_{A\oplus B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x),\quad (\forall)\, x\in U \qquad (18)$$

Relațiile și operațiile cu **mulțimi fuzzy** prezentate în definițiile anterioare sunt **extensii ale relațiilor și operațiilor omoloage** cu **mulțimi clasice**. Aceste definiri ale relațiilor și operațiilor cu mulțimi fuzzy nu sunt unicele extensii ale relațiilor și operațiilor cu mulțimi clasice.

Exemplul 2 Pe referențialul finit $U=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ cu șase elemente, se definesc trei mulțimi fuzzy A, B, C după cum urmează:

$$A=\{(x_1|0,3),(x_2|0,1),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0,6),(x_6|0,4)\}$$
$$B=\{(x_1|0,4),(x_2|0,2),(x_3|0,1),(x_4|0),(x_5|0,6),(x_6|0,5)\}$$
$$C=\{(x_1|0,3),(x_2|0),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0,3),(x_6|0,8)\}$$

Mulțimile vagi obținute prin operațiile definte anterior sunt prezetate în Tabelul nr. 2:

AUB	x_1	0,4	x_2	0,2	x_3	0,1	x_4	1	x_5	0,6	x_6	0,5
A∩B	x_1	0,3	x_2	0,1	x_3	0	x_4	0	x_5	0,6	x_6	0,4
A⊕C	x_1	0,51	x_2	0,1	x_3	0	x_4	1	x_5	0,72	x_6	0,88
B.C	x_1	0,12	x_2	0	x_3	0	x_4	0	x_5	0,18	x_6	0,4
cB	x_1	0,6	x_2	0,8	x_3	0,9	x_4	1	x_5	0,4	x_6	0,5
B∩C	x_1	0,3	x_2	0	x_3	0	x_4	0	x_5	0,3	x_6	0,5
B∩cB	x_1	0,4	x_2	0,2	x_3	0,1	x_4	0	x_5	0,4	x_6	0,5
AUcA	x_1	0,7	x_2	0,9	x_3	1	x_4	1	x_5	0,6	x_6	0,6

Tabelul nr. 2

Deoarece majoritatea **proprietăților** operațiilor cu **mulțimi clasice** se conservă și la mulțimi fuzzy, în continuare vor fi prezentate câteva din cele mai importante **proprietăți ale operațiilor cu mulțimi fuzzy**. Aceste proprietăți rezultă direct din definițiile operațiilor respective.

Fie trei mulțimi fuzzy $A,B,C\in F(U)$.

Comutativitatea reuniunii U, intersecției D, produsului algebric "." și sumei algebrice ⊕:

$$AUB=BUA \qquad (19)$$
$$A\cap B=B\cap A \qquad (20)$$
$$A.B = B.A \qquad (21)$$
$$A\oplus B=B\oplus A \qquad (22)$$

Asociativitatea celor patru operații U, ∩ , "•" *și ⊕:*

$$(AUB)UC = AU(BUC) \qquad (23)$$
$$(A.B).C = A.(B.C) \qquad (24)$$
$$(A\oplus B)\oplus C = A\oplus (B\oplus C) \qquad (25)$$

Idempotența reuniunii și intersecției. Produsul și suma algebrică nu sunt idempotente:

$$AUA = A \qquad (26)$$

$$A . A * A \qquad (27)$$

Distributivitatea reuniunii în raport cu intersecția şi a intersecției în raport cu reuniunea:

$$AU(B\cap C) = (AUB) \cap (AUC) \qquad (28)$$

Operațiile cu mulțimea vidă şi cu înteg universul ($\varnothing$ şi U sunt prim şi respectiv ultim element):

$$A U \varnothing = A \quad (29) \qquad AUU=U \quad (30)$$

$$A\cap\varnothing = \varnothing \quad (31) \qquad A\cap U=A \quad (32)$$

$$A.\ \varnothing=\varnothing \quad (33) \qquad A.U=A \quad (34)$$

$$A\oplus\varnothing=A \quad (35) \qquad A\oplus U=U \quad (36)$$

Legile lui De Morgan: $c(A\cap B)=cAUcB$ (37)

$$c(AUB)=cA\cap cB \qquad (38)$$

$$c(A.B) = cA\oplus cB \qquad (39)$$

$$c(A\oplus B)=cA.cB \qquad (40)$$

Involuția: $c(cA) = A$ (41)

În general, pentru o mulțime fuzzy oarecare $A\in F(U)$ avem:

$$AUcA\neq U \qquad (42)$$

$$A\cap cA\neq\varnothing \qquad (43)$$

Omolog diferenței mulțimilor clasice, se poate defini o extindere a acestei operații la mulțimile fuzzy. *Diferența mulțimilor fuzzy* $A,B\in F(U)$ (A \ B) este o nouă mulțime fuzzy definită prin funcția sa caracteristică astfel:

$$\mu_{A\backslash B}(x)=\begin{cases} \mu_A(x) \text{ dacă } \mu_A(x)>\mu_B(x) \\ 0 \quad \text{în caz contrar} \end{cases} \qquad (44)$$

Mulțimile fuzzy $A,B\in F(U)$ sunt *disjuncte* dacă au intersecția vidă:

$$A,B \text{ sunt disjuncte} \iff A\cap B = \varnothing \qquad (45)$$

Diferența mulțimilor fuzzy (dealtfel, ca şi cea a mulțimilor clasice) nu este comutativă, cele două mulțimi A\B şi B\A fiind chiar **disjuncte**.

Din multitudinea (de ordinul sutelor) proprietăților operațiilor cu mulțimi clasice care se conservă şi la operațiile cu mulțimi fuzzy. vom aminti doar că:

$$A\cap B\subset A \qquad (46)$$

$$A\cap B\subset B \qquad (47)$$

$$A UB\supset A \qquad (1.50)$$

$$A UB\supset B, \qquad (\forall)\, A, B\in F(U) \qquad (48)$$

Aceste **proprietăți**, împreună cu o serie de **instrumente** construite pentru lucrul cu **mulțimile vagi (fuzzy)** fac obiectul unui număr impresionant de **lucrări matematice**. Din punct de vedere al acestei **lucrări**, ele prezintă importanță prin prisma **semnificației economice** pe care o au în condițiile în care **funcția caracteristică** reprezintă o **măsură a competitivității produselor vândute pe o piață**, indiferent de modul în care este determinată. Astfel $\boldsymbol{\mu_A(x)}$ poate reprezenta **cota de piață** deținută pe **piața U** de **produsul**

x, în timp ce **μ_B(x)** poate avea semnificaţia de **raport calitate/preţ** pentru **produsul x** pe piaţa respectivă. De asemenea, μ_A (x) poate reprezenta nivelul de competitivitate al unui producător sau produs, prin prisma unui set de criterii de apreciere, în timp ce μ_B(x) poate indica competitivitatea determinată pe baza unui alt set de criterii, având deci pentru acelaşi produs valori diferite.

Bibliografie

1. IONIŢĂ, F. - Creşterea competitivităţii produselor şi serviciilor specifice industriei constructoare de maşini pe piaţa internă şi externă prin stabilirea unui raport judicios calitate-preţ, Teză de doctorat, ASE, Bucureşti, 2005
2. ZADEH, L.A. - Fuzzy sets - Information and Control. Vol 8, New York, 1965, p.338-353