FUNCȚII SPLINE DE APROXIMARE A SOLUȚIILOR MODELELOR DINAMICE ÎN ECONOMIE

LECT.UNIV.DR. CĂUŞ VASILE AUREL
Universitatea din Oradea, Facultatea de Ştiințe, Departamentul de Matematică şi Informatică, str. Armatei Române nr.5, Oradea, telefon: 0722436711
E-mail: vcaus@uoradea.ro

Abstract: Over the past decades, economic thinking has achieved levels of rigor and argumentation comparable to any other scientific discipline. The principles of axiomatization and mathematical logic are well rooted in economic theory. If the main objective is to collect the fruits of this scientific endeavour, the same accepted principles should be applied for solving economic models.

Introducere

Utilizarea modelelor în analiza şi prognozarea fenomenelor economice tinde să devină o ştiință de sine stătătoare. Foarte mulți matematicieni şi-au canalizat cercetările spre aplicații practice, iar domeniul economic este una din ariile, cele mai importante, de răspândire a rezultatelor obținute. Dovadă este faptul că în ultimul sfert de secol peste 30% din premiile Nobel pentru economie au fost decernate unor matematicieni. Matheconomia va primi, în curând, alături de psihoeconomie recunoaşterea oficială.

În ceea ce priveşte modelarea economică se disting două etape importante:

a) identificarea variabilelor pertinente şi corecta formulare a ecuațiilor. Această etapă impune utilizarea rezultatelor obținute prin metode statistice.
b) aproximarea soluțiilor şi verificarea convergenței şi stabilității lor. În ceea ce priveşte aproximarea soluțiilor o clasă de funcții des utilizată este cea a funcțiilor spline care, spre deosebire de polinoame, au proprietăți de netezime superioare.

Trebuie menționat că aceste două etape nu sunt singurele ce trebuiesc parcurse, dar sunt cele mai dificile. Până la a ajunge la prima etapă trebuie parcurs un drum destul de lung şi dificil care include şi o oarecare experiență pentru cei implicați în procesul de modelare şi analiză.

În continuare vom prezenta un model care utilizează o ecuație integro-diferențială Volterra cu argument întârziat. Astfel de ecuații admit soluții dificil de determinat cu exactitate (de fapt, în cele mai multe cazuri, imposibil), soluții ce pot fi doar aproximate. Metoda de aproximare utilizată va fi cea a funcțiilor spline.

Astfel de ecuații cu argument întârziat îşi gasesc cu precădere aplicabilitatea în domeniul economic deoarece pot modela cu succes procesele economice dinamice care sunt bazate pe structuri bacward şi forward. Modelarea jocurilor strategice rezultate din aplicarea politicilor monetare sau utilizarea regulilor monetare poate fi un bun exemplu.

Prezentarea metodei

Considerăm ecuația:

$$
(1) \quad \begin{gathered}
y'(x) = f\left(x, y(x), y(g(x)), \int_a^x K(x,t,y(t),y(g(t)))dt\right), \\
a \le x \le b \\
y(x) = \phi(x), \quad x \in [a^*, a[, \quad a^* = \inf\{g(x), x \in [a,b]\} \\
y(a) = y_0
\end{gathered}
$$

unde: f, g, K şi ϕ sunt funcţii date şi y reprezintă nivelul PIB raportat la starea economiei.

Descrierea metodei.

Ecuaţia (1) poate fi rescrisă în forma:

$$
(2) \quad \begin{gathered}
y'(x) = f(x, y(x), y(g(x)), z(x)), \quad a \le x \le b \\
z(x) = \int_a^x K(x,t,y(t),y(g(t)))dt \\
y(a) = y_0 \\
y(x) = \phi(x), \quad x \in [a^*, a)
\end{gathered}
$$

Funcţia g, de întârziere, este continuă pe intervalul $[a^*, b]$ şi satisface inegalitatea $a^* \le g(x) \le x$, $x \in [a,b]$. Vom presupune că $\phi \in C^r[a^*, a)$ unde $r \in N$.

Presupunem că $f : [a,b] \times R^3 \to R$, $(x,u,v,z) \to f(x,u,v,z)$ este continuă şi satisface condiţia Lipschitz:

$$
(3) \quad | f^{(a)}(x,u_1,v_1,z_1) - f^{(a)}(x,u_2,v_2,z_2) | \le L_1\{| u_1 - u_2 | + | v_2 - v_2 | + | z_1 - z_2 |\}
$$

şi că $\exists P < \min\left\{\frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}\right\}$ a.î.

$$
(4) \qquad | v_1 - v_2 | \le P \, | f^{(q)}(x,u_1,v_1,z) - f^{(q)}(x,u_2,v_2,z_2) |
$$

$$
\forall (x,u_1,v_1,z_1), (x,u_2,v_2,z_2) \in ([a,b] \times R^3).
$$

Vom presupune deasemenea că funcţia $K : [a,b] \times [a,b] \times R^2 \to R$, este netedă şi mărginită şi satisface condiţiile Lipschitz:

$$
(5) \qquad | K(x,t,u_1,v_1) - K(x,t,u_2,v_2) | \le L_2\{| u_1 - u_2 | + | v_1 - v_2 |\}
$$

şi

$$
(6) \qquad | v_1 - v_2 | \le P \, | K(x,t,u_1,v_1) - K(x,t,u_2,v_2) |
$$

$$
\forall (x,t,u_1,v_1), (x,t,u_2,v_2) \in ([a,b] \times [a,b] \times R^2).
$$

Aceste condiţii ăsigură existenţă şi unicitatea soluţiei ecuaţiei (2).
Definim funcţia spline de aproximare a soluţiei astfel:

$$(7) \qquad S(x) = \begin{cases} S_\Delta(x) & x \in [a,b] \\ \phi(x) & x \in [a^*, a] \end{cases}$$

Fie Δ o partiție uniformă a intervalului $[a,b]$ dată de:

$$a = x_0 < \ldots < x_k < \ldots < x_N = b,$$

$$h = \frac{b-a}{N}, x_{k+1} - x_k = h, k = 0(1)N-1.$$

Pentru orice $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0(1)N-1$, definim S_Δ prin:

$$(8) \qquad S_\Delta(x) = S_k(x0 = S_{k-1}(x) + \sum_{i=0}^{r} \frac{M_k^{(i)}}{(i+1)!}(x - x_k)^{i-1}$$

unde:

$$(9) \qquad M_k^{(i)} = f^{(i)}\left[x_k, S_{k-1}(x_k), S_{k-1}(g(x_k)), \int_a^{x_k} K(x_k, t, S_{k-1}(t))dt\right]$$

unde: $$S_{-1}(x_0) = y_0, \quad S_{-1}(t) = y_0,$$

$$S_{-1}(g(x_0)) = \phi(g(x_0)), \quad S_{-1}(g(t)) = \phi(g(t))$$

Funcția spline astfel definită există şi este unică. Mai mult decât atât metoda este convergentă şi soluția stabilă.

Bibliografie:

1. Ayad, A. – „Spline approximation for second order Fredholm integro-differential equation", Intern. J. Computer Math. Vol.00, 1997, 1-3.
2. Căuş, V.A., Micula, G. **– „**Numerical Solution of the Delay Differential Equations by Nonpolinomial Spline Functions", Studia Univ. Babeş-Bolyai, Cluj Napoca, Informatica 46, 2001, No. 2
3. Garey, L.E., Gladwin, C.J. – „Direct numerical methods for non linear integro-differential equations", Intern. J. Computer Math. 34, 1990, 50-59.
4. Micula, G., Micula, S. – „Handbook of Splines", Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1999.