

MEDIILE MOBILE CENTRATE

BOSÂNCEANU MARINICĂ
Universitatea „Ștefan cel Mare” Suceava
E-mail: boss@eed.usv.ro

Using empirical filters or of mobile centered environments has as objective estimation of tendency component, the approach being justified, for the implicit assumption that this component is linear. In the absence of temporary component, linear length filter may be arbitrary fixed, the contrary situation being set.

Mobile average is named centered because linear filter which defines it is computed begging with a part of formed chronics, so that the filter length should be obligatory an odd number ($s = 2n + 1$) and the difference $r = n + 1$. In the paper there are presented the centered mobile average in the absence, respectively the presence of temporary component.

Utilizarea acestor filtre liniare, a căror obiectiv este estimarea componentei de tendință ($\hat{f}_t = y_t$), este întemeiată, întotdeauna, pe ipoteza implicită că această componentă este liniară ($f_t = at + b$). În absența componentei sezoniere, lungimea s a filtrului liniar se poate fixa arbitrar, cazul contrar fiind atunci când aceasta este impusă.

1. Media mobilă centrată în absența componentei sezoniere

Media mobilă este numită centrată pentru că filtrul liniar y_t , care o definește, se calculează plecând de la o parte a cronicei compuse x_t (din n observații care preced x_t și din n observații care urmează această valoare x_t). Altfel spus, lungimea s a filtrului este obligatoriu un număr impar (care se poate lua sub forma $s = 2n + 1$) și decalajul $r = n + 1$.

În concluzie, formula de definire a filtrului *medie mobilă centrată* va fi:

$$y_t = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} x_{t-n-1+i} \quad (1)$$

sau

$$y_t = \frac{1}{2n+1} (x_{t-n} + x_{t-n+1} + x_{t-n+2} + \dots + x_t + x_{t+1} + \dots + x_{t+n}), \quad (2)$$

ceea ce se poate scrie și astfel:

$$y_t = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{i=+n} x_{t+i} \quad (3)$$

Acest tip de filtru a fost deja folosit pentru două lungimi ale filtrului: $s = 3$ ($\Rightarrow n = 1$) și $s = 5$ ($\Rightarrow n = 2$), exemplele reliefând două **aspecte** importante:

- MMC aplicată la o serie, care se reduce la o componentă de tendință liniară ($x_t = f_t = at + b$), redă, fără distorsiune, chiar însăși cronica;
- când se adaugă la această componentă de tendință liniară o componentă aleatoare ($x_t = f_t + \varepsilon_t = at + b + \varepsilon_t$), estimarea componentei de tendință liniară prin filtru ($\hat{f}_t = y_t$) este mai

bună atunci când lungimea filtrului este mare, doar că acest câștig de precizie se plătește prin întoarcerea pe o cronică mai scurtă de valori estimate.

Atunci când ipoteza unei evoluții de tendință liniară nu este verificată și nu există componentă aleatoare, vom avea două cazuri:

- filtrul liniar supraestimează, întotdeauna, componenta de tendință ($\hat{f}_t = y_t > f_t$); creșterea de tendință se accelerează (evoluție convexă);
- există subestimare: $\hat{f}_t = y_t < f_t$; încetinire a creșterii de tendință (evoluție concavă).

Dacă pe lângă componenta de tendință există și componenta aleatoare, aceste supra- sau subestimări nu sunt sistematice, dar rămân cele mai probabile, această probabilitate fiind cu atât mai puternică cu cât lungimea filtrului liniar medie mobilă este mare.

Matematic, o funcție este convexă, dacă $f(x_3) - f(x_2) \geq f(x_2) - f(x_1)$ pentru toate valorile lui x_1, x_2 și x_3 , astfel încât $x_1 < x_2 < x_3$.

O funcție este concavă dacă avem: $f(x_3) - f(x_2) \leq f(x_2) - f(x_1)$ pentru toate valorile luate de x_1, x_2 și x_3 , astfel încât $x_1 < x_2 < x_3$.

Ilustrăm aceste proprietăți prin două exemple numerice, cu evoluții de tendință convexă și concavă și un filtru MMC pe 3 perioade.

Tabel 1.

t	1	2	3	4	5	6
$x_t = f_t = 10 + 2t + 0,1t^2$ (evoluție convexă)	12,1	14,4	16,9	19,6	22,5	25,6
$y_t = (x_{t-1} + x_t + x_{t+1}) / 3$	--	14,47	16,97	19,67	22,57	--
$x_t = f_t = 10 + 2t - 0,1t^2$ (evoluție concavă)	11,9	13,6	15,1	16,4	17,5	18,4
$y_t = (x_{t-1} + x_t + x_{t+1}) / 3$	--	13,53	14,4	15,7	16,8	--

În situația unei componente de tendință neliniară, frecvent se utilizează tot tehnica MMC pentru a estima această componentă, făcând ipoteza că distorsiunea introdusă este slabă, ceea ce este, cel mai adesea, acceptabil. Această remarcă rămâne valabilă când cronică conține o sezonaliitate (eliminată prin filtrul liniar potrivit).

2. Media mobilă centrată în cazul existenței unei componente sezoniere

Dacă seria studiată, de la care se caută a estima componenta de tendință, comportă fluctuații sezoniere, lungimea filtrului este impusă prin numărul de perioade presupuse de an (în cazul unui ciclu anual).

Ajustarea seriilor cronologice cu variații sezoniere prin metoda mediilor mobile constă în înlocuirea termenilor empirici cu termenii rezultați în urma calculului mediilor mobile pentru seria dată. Prin înlocuirea termenilor reali cu termenii calculați va rezulta o curbă mai rotunjită sau o dreaptă de tendință, cu condiția ca să se fi determinat corect periodicitatea de variație a fenomenului. Periodicitatea este evidențiată de punctele de maxim sau de minim.

Calcularea mediei mobile constă în aflarea mediilor aritmetice dintr-un număr impar sau par de termeni luați succesiv, în funcție de mărimea unui ciclu de variație. În varianta că numărul termenilor luați în calcul este impar, mediile obținute se suprapun pe unii termeni reali pe care îi vom înlocui. Dacă se cuprinde în calcul un număr par de termeni, mediile *cad* între doi termeni reali. Pentru a afla care termen va fi înlocuit se va face centrarea mediilor mobile, adică se determină media aritmetică a două medii mobile consecutive.

Numărul termenilor din seria ajustată prin medii mobile va fi:

$$N - (n - 2) - 1 \quad \mathbf{n \text{ impar}}$$

și

$$N - (n - 2) - 2 \quad n \text{ par,}$$

unde: N – numărul termenilor din seria empirică;
 n – numărul termenilor cuprinși în calculul mediilor mobile.

Tabel 2. Generare MMC pe 5 perioade – cazul 1.

Perioada -t-	Observații - x_t -	MMC - y_t -	Grafic aferent col. 3
1	2	3	4
1	158,944	-	
2	161,726	-	
3	238,277	167,223¹	
4	124,919	156,462	
5	152,250	159,587	
6	105,138	136,101	
7	177,351	158,175	
8	120,849	147,900	
9	235,290	144,891	
10	100,875	147,610	
11	90,090	160,525	
12	190,946	133,939	
13	185,727	151,289	
14	102,058	159,413	
15	187,623	167,789	
16	130,713	154,140	
17	232,826	176,244	
18	117,482	166,142	
19	212,578	171,047	
20	137,112	156,423	
21	155,237	159,518	
22	159,705	142,408	
23	132,960	146,489	
24	127,025	-	
25	157,416	-	

Media mobilă centrată în cazul existenței unei componente sezoniere, comportând un număr impar de perioade, convine a se utiliza, în scopul de a regăsi exact componenta de tendință, o MMC a cărei lungime este egală cu numărul de perioade care constituie ciclul anual, dar trebuind a fi reunite următoarele **condiții**:

- cronica nu presupune componentă aleatoare (în caz contrar se obține o estimare a acestei componente în loc de a regăsi valoarea exactă);
- componenta de tendință este liniară ($f_t = at + b$);
- modelul este aditiv ($x_t = f_t + c_t = at + b + c_t$), ceea ce , ținând cont de faptul că fluctuațiile sezoniere se compensează pe un an (principiul conservării ariilor), permite eliminarea componentei sezoniere atunci când MMC se *duce* pe un număr egal cu numărul de perioade anuale.

Tabel 3.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f_t = 10 + t$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
c_t	-2	+1	+1	+3	-2	+1	-2	0	+2	-1	-1	-2	+1	+1	+3
$x_t = f_t + c_t$	9	13	14	17	13	17	15	18	21	19	20	20	24	25	28
$y_t = \frac{1}{11} \sum_{-5}^{+5} x_{t+i}$	--	--	--	--	--	16	17	18	19	20	--	--	--	--	--

Tabel 4. Generare MMC pe 5 perioade – cazul 2.

Perioada	Observații - x_t -	MMC - y_t -	Grafic aferent col. 3
1	2	3	4
1	161,021	-	
2	165,941	-	
3	246,108	173,654¹	
4	132,514	164,635	
5	162,688	170,105	
6	115,923	148,134	
7	193,294	173,521	
8	136,251	164,801	
9	259,447	163,516	
10	119,091	168,904	
11	109,497	185,095	
12	220,233	158,890	
13	217,208	179,990	
14	128,423	190,961	
15	224,600	202,995	
16	164,341	190,403	
17	280,405	217,481	
18	154,245	208,800	
19	263,814	216,816	
20	181,195	203,185	
21	204,422	209,150	
22	212,248	192,338	
23	184,070	199,689	
24	179,757	-	
25	217,947	-	

Exemplul prezentat în tab.3 se întâlnește des în întreprinderile mici și mijlocii, care își închid porțile o lună pe an (întrerupere a activității), fapt care reduce la 11 numărul lunilor lucrătoare. Cronica considerată este una teoretică, ea necuprinzând componentă aleatoare (în vederea verificării proprietății avansate). Se utilizează un filtru MMC pe 11 perioade.

Remarci

Introducerea unei componente aleatoare nu ne mai permite să regăsim exact componenta de tendință ($f_t = y_t$), ci numai o estimare a acesteia ($\hat{f}_t = y_t$).

Dacă modelul implicit utilizat nu este de tip aditiv, ci multiplicativ, nu mai este posibil, chiar în absența componente aleatoare, de a regăsi componenta de tendință prin MMC ($f_t \neq y_t$), dar când evoluția de tendință nu este prea pronunțată (ceea ce este, cel mai adesea, cazul în economie), distorsiunea va fi slabă.

Remarca (2), precum și luarea în considerare a componente aleatoare, care, în orice situație, nu permite de a regăsi decât o estimare, permit ca în practică să se folosească, în special, MMC (a cărei lungime este convenabil aleasă, în vederea eliminării sezonality) pentru a estima componenta de tendință, chiar dacă modelul postulat este de tip multiplicativ și evoluția nu este liniară.

Practica utilizării acestor tehnici statistice, întâlnită deseori în economie, care constă în a face prognoze pe baza datelor observate pe mai multe exerciții bugetare anuale, presupune efectuarea de previziuni, plecând de la de s ori mai puține observații decât dacă munca ar fi fondată pe informațiile

din MMC-uri, și nu permite de a se ține cont, la timp, de modificările structurale intervenite în componenta de tendință.

În acest sens trebuie să menționăm că în tab.3, cumulul lunilor 1÷11 (primul exercițiu financiar anual) s-a obținut multiplicând cu 11 estimarea componentei de tendință a lunii 6. Al doilea exercițiu nu poate fi obținut, într-o manieră asemănătoare, decât 11 luni mai târziu (plecând de la estimarea componentei de tendință a lunii 17). Așadar, la un factor de multiplicare apropiat, estimarea componentei de tendință și exercițiul glisant (dus pe 11 perioade consecutive și ca atare eliminându-se incidența componentei sezoniere) sunt identice.

Dacă analiza se restrânge doar la exercițiile *civile*, munca se va desfășura bine pe un volum de informații de 11 ori mai mic. Această proprietate nu va fi respectată și în cazul unei componente sezoniere care comportă un număr par de perioade, dar distorsiunea introdusă poate fi considerată ca neglijabilă.

Bibliografie:

1. Giard, V. – „, Gestion de la production “, Economica, Ediția III, Paris, 2001.
 2. Giard, V. – „, Statistique appliquée à la gestion “, Economica, Ediția V, Paris, 1987.
 3. Jaba, E. – „, Statistică “, Ed. Economică, Ediția II, București, 2000.
- Willis, R. – „, A guide to forecasting for planners and managers “, Prentice Hall, 1987